

УДК: 621.396.969

DOI: 10.53816/23061456_2022_5-6_19

**МЕТОДИКА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕМЕНТОВ
СЛОЖНОЙ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ЦЕЛИ НА ОСНОВЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**THE METHOD OF EXTRAPOLATION OF THE TRAJECTORIES OF ELEMENTS
OF A COMPLEX BALLISTIC TARGET BASED ON THE PARABOLIC THEORY
AND A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Д-р техн. наук А.Н. Цыбульник, Р.С. Володин

D.Sc. A.N. Tsybulnik, R.S. Volodin

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны

У современных баллистических ракет средней и межконтинентальной дальности головная часть отделяется от последней ступени баллистической ракеты в конце активного участка и совершает полет по заданной траектории с дальнейшим наведением элементов сложной баллистической цели на заданный объект. Анализ движения элементов сложной баллистической цели включает расчет траектории полета на внеатмосферном участке (за пределами условной границы атмосферы) и участке входа в атмосферу. Для решения задачи перехвата элементов сложной баллистической цели к некоторому моменту времени с заданной точностью предложена методика экстраполяции траекторий элементов сложной баллистической цели в безвоздушном пространстве и с учётом сопротивления воздуха. Получены системы уравнений для внеатмосферного и атмосферного участков полета элементов сложной баллистической цели в нормальной земной системе координат, а также проведено математическое моделирование, подтверждающие работоспособность предложенной методики. **Ключевые слова:** элементы сложной баллистической цели, экстраполяция траекторий, параболическая теория, система дифференциальных уравнений, нормальная артиллерийская атмосфера, метод Рунге-Кутты.

In modern ballistic missiles of medium and intercontinental range, the warhead is separated from the last stage of the ballistic missile at the end of the active section and flies along a given trajectory with further guidance of elements of a complex ballistic target at a given object. The analysis of the movement of elements of a complex ballistic target includes the calculation of the flight trajectory in the exoatmospheric section (outside the conditional boundary of the atmosphere) and the atmospheric entry section. To solve the problem of intercepting elements of a complex ballistic target by a certain point in time with a given accuracy, a method for extrapolating the trajectories of elements of a complex ballistic target in an airless space and taking into account air resistance is proposed. The systems of equations for the extra-atmospheric and atmospheric flight segment of the elements of a complex ballistic target in the normal earth coordinate system were obtained, and mathematical modeling was carried out confirming the operability of the proposed technique.

Keywords: elements of a complex ballistic target, extrapolation of trajectories, parabolic theory, system of differential equations, normal artillery atmosphere, method Runge-Kutta.

Последние годы характеризуются интенсивным развитием ракетных систем иностранных государств, увеличением ракетно-ядерного потенциала, с одной стороны, и совершенствованием путей защиты от баллистических ракет (БР) — с другой. БР остаются ключевым элементом боевой мощи вооруженных сил иностранных государств, важнейшим средством достижения политических целей. Отечественные воздушно-космические силы должны эффективно противостоять этому ударному средству иностранных государств [1].

У современных БР средней и межконтинентальной дальности головная часть (ГЧ) отделяется от последней ступени ракеты в конце активного участка и совершает полет по заданной траектории с наведением элементов сложной баллистической цели (СБЦ) на определенные объекты. Анализ движения элементов СБЦ включает расчет траектории полета на внеатмосферном участке (за пределами условной границы атмосферы) и участке входа в атмосферу [2]. Для решения задачи перехвата элементов СБЦ БР необходимо определить местоположение элементов СБЦ к некоторому моменту времени с заданной точностью. В связи с этим предложена методика экстраполяции траекторий элементов СБЦ, состоящая из двух этапов.

На первом этапе движение элементов СБЦ на внеатмосферном участке до высот порядка 80 км протекает полностью в безвоздушном пространстве и в соответствии с параболической теорией [3, 14–16]. Тогда система уравнений, описывающая движение элементов СБЦ в безвоздушном пространстве в центральном поле тяготения Земли и нормальной земной системе координат (НЗСК), имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{V}_{x_g} = 0; \\ \dot{V}_{y_g} = -g; \\ \dot{x}_g = V_{x_g}; \\ \dot{y}_g = V_{y_g}, \end{cases}$$

где V_{x_g}, V_{y_g} — составляющие скорости изменения координат (x, y) ;

$V_{x_g} = \text{const}$, величина постоянная.

Из параболической теории следует уравнение траектории в безвоздушном пространстве:

$$x = V \cos \Theta \Delta t;$$

$$y = x \operatorname{tg} \Theta - \frac{gx^2}{2V^2},$$

где Θ — угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью;

Δt — временной интервал определения x, y .
В случае, когда угол $\Theta = 0$,

$$y_i = \frac{gx_i^2}{2V_i^2}. \quad (1)$$

По результатам измерения составляющих скорости V_x, V_y, V_z , определяется вектор скорости

$$V_{\text{полн}} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad \text{и} \quad \text{угол} \quad \Theta = \arcsin \frac{V_z}{V_{\text{полн}}}.$$

На первом интервале Δt дискретного сопровождения элементов СБЦ в соответствии с параболической теорией вычисляются:

$$x_1 = V_1 \cos \Theta_1 \Delta t; \quad (2)$$

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \Theta - \frac{gx_1^2}{2V_1^2},$$

где $\Theta_1 = \arcsin \frac{V_y}{V_{\text{полн}}}$.

Кроме того, определяются начальные условия V_2 и Θ_2 для отрезка траектории второго временного интервала Δt .

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gy_1}; \quad (3)$$

$$\Theta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{V_1} \sqrt{2gy_1} \right).$$

На рис. 1 показано поэтапное формирование данных для рекуррентного построения траектории элементов СБЦ в безвоздушном пространстве в соответствии с параболической теорией.

Выполненные преобразования (1)–(3) обеспечивают возможность записи алгоритма рекуррентного сопровождения до достижения высоты 80 км:

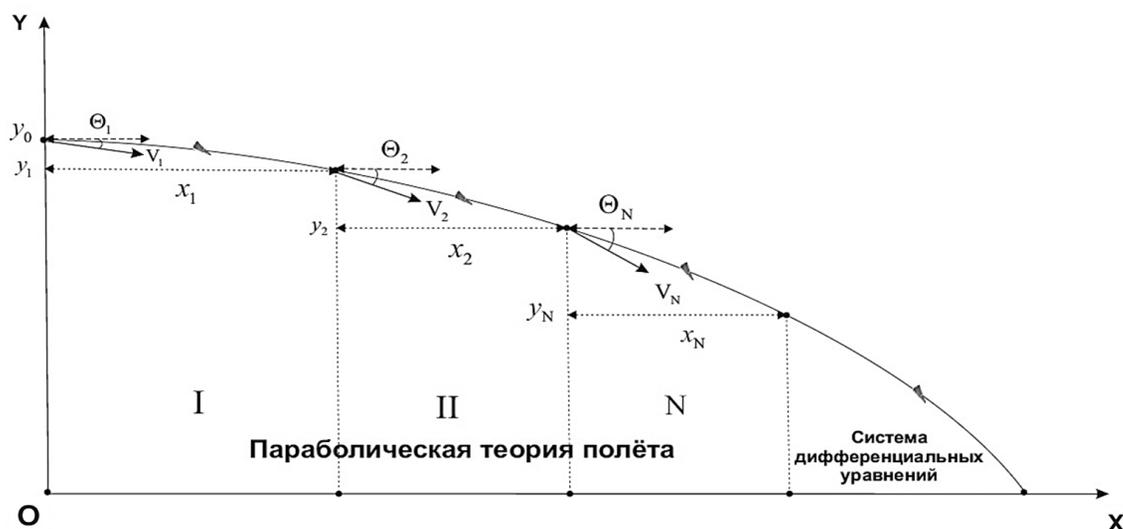


Рис. 1. Иллюстрация формирования данных для рекуррентного построения траектории элементов СБЦ в безвоздушном пространстве в соответствии с параболической теорией

$$\begin{cases} x_i = V_i \cos \Theta_i \cdot \Delta t; \\ y_i = \frac{g x_i^2}{2 V_i^2}; \\ V_{i+1} = \sqrt{V_i^2 + 2 g y_i}; \\ \Theta_{i+1} = \left(\frac{1}{V_i} \sqrt{2 g y_i} \right). \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x; \\ \dot{y} = V_y; \\ \dot{z} = V_z; \\ \dot{V}_x = -E V_x; \\ \dot{V}_y = -E V_y; \\ \dot{V}_z = -E V_z - g; \\ \Delta t = 1, \end{cases} \quad (5)$$

После каждого шага итерации определяется полная дальность полета $X_T = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n$ и $Y_T = Y_0 - (y_1 + y_2 + \dots + y_i + \dots + y_n)$.

Математическое моделирование системы уравнений (4) методом Рунге-Кутты с достаточно крупным шагом $\Delta t = 20$ секунд [4] по параболической теории начинается в момент окончания полета на активном участке траектории БР и заканчивается в момент достижения элементами СБЦ высоты 80 км.

Полет элементов СБЦ в атмосфере на высотах менее 80 км требует строгого учёта аэродинамических сил, действующих на объект [3]. Для описания движения элементов СБЦ на атмосферном участке траектории используются дифференциальные уравнения с известными начальными условиями, полученные из системы уравнений (4).

Второй этап — движение элементов СБЦ на атмосферном участке траектории, — основан на системе дифференциальных уравнений движения центра масс элементов СБЦ в НЗСК:

где x, y, z — координаты элемента СБЦ в НЗСК;

V_x, V_y, V_z — проекции вектора скорости на оси НЗСК;

$\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$ — проекции вектора ускорения на оси НЗСК;

g — ускорение силы свободного падения;

E — баллистическая функция элемента СБЦ,

$$E = c \cdot H(z) \cdot V_{\text{полн}} \cdot C_{\text{хэт}} \cdot 4,74 \cdot 10^{-4};$$

где c — баллистический коэффициент элемента СБЦ;

$H(z)$ — относительная плотность воздуха как функция высоты;

$C_{\text{хэт}}$ — эталонная функция лобового сопротивления, значения которых приведены в таблице;

Баллистический коэффициент элемента СБЦ определяется:

Значения эталонной функции лобового сопротивления для различных скоростей элементов СБЦ

Число Маха	$C_{хэт}$						
0,1	0,305	1,1	0,616	2,1	0,462	3,1	0,361
0,2	0,305	1,2	0,618	2,2	0,449	3,2	0,352
0,3	0,306	1,3	0,605	2,3	0,439	3,3	0,346
0,4	0,308	1,4	0,578	2,4	0,426	3,4	0,338
0,5	0,308	1,5	0,559	2,5	0,416	3,5	0,331
0,6	0,308	1,6	0,538	2,6	0,405	3,6	0,325
0,7	0,316	1,7	0,521	2,7	0,394	3,7	0,318
0,8	0,333	1,8	0,506	2,8	0,386	3,8	0,312
0,9	0,382	1,9	0,489	2,9	0,376	3,9	0,308
1	0,551	2	0,477	3	0,367	4	0,302

$$C = \frac{id^2}{q} \cdot 10^{-3},$$

где d — диаметр элемента СБЦ;
 q — масса элемента СБЦ;
 i — коэффициент формы элемента СБЦ,

$$i = \frac{C_x}{C_{хэт}},$$

C_x — функция сопротивления воздуха.

При математическом моделировании использованы параметры и характеристики элементов СБЦ, приведенные в [5], а также значения эталонной функции лобового сопротивления в зависимости от скорости элементов СБЦ (таблица) [6].

Все расчеты производятся относительно некоторых средних данных (нормальных метеорологических условий). Наиболее распространенными являются условия, задаваемые международной стандартной атмосферой или нормальной артиллерийской атмосферой (НАА), характерных для большинства справочной литературы [7].

Система уравнений (5) дополняется уравнениями состояния НАА, связывающими основные параметры атмосферы, имеющими вид:

$$\frac{P}{\rho} = RT, \quad (6)$$

где P — давление воздуха (Па);
 ρ — плотность воздуха (кг/м³);
 T — абсолютная температура воздуха (К);

$$R — \text{удельная газовая постоянная} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right).$$

В основу НАА Вентцель Д.А. [8] положен характер изменения виртуальной температуры τ с высотой, позволяющей учесть влажность воздуха. Виртуальная температура τ — температура сухого воздуха, имеющего давление P , при которой он имеет ту же плотность, что и влажный воздух при температуре T и давлении P [9].

Уравнение состояния влажного воздуха имеет вид:

$$\frac{P}{\rho} = R\tau, \quad (7)$$

где $\tau = \frac{T}{1 - \frac{3e}{8p}}$ — виртуальная температура;

e — упругость воздуха.

Число Маха, используемое при интегрировании системы дифференциальных уравнений движения центра масс элементов СБЦ:

$$M = \frac{v}{a}, \quad (8)$$

где M — число Маха;
 v — скорость движения центра масс элементов СБЦ;

a — скорость звука в атмосфере,

$$a = \sqrt{\chi \cdot R \cdot \tau_N}, \quad (9)$$

$\chi = 1,4$ — показатель адиабаты воздуха.

Относительные значения давления π и плотности воздуха H с высотой z определяются зависимостями:

$$\pi(z) = \frac{P(z)}{P_0}; \quad H(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_0};$$

$$\pi(z) = \frac{T_0}{T(z)} \exp \left\{ -\frac{1}{R} \int_0^{z_{\text{узд}}} \frac{g(z) dz}{T(z)} \right\}; \quad (10)$$

$$H(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{R} \int_0^{z_{\text{узд}}} \frac{g(z) dz}{T(z)} \right\}.$$

Общая математическая модель атмосферы, в основе которой лежит НАА, имеет вид:

$$\tau(z) = \tau_N(z) + \Delta\tau(z); \quad P_0 = P_{0N} + \Delta P_0;$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{g_{0N} v_z}{R\tau(z)} \pi(z); \quad P(z) = P_0 \pi(z); \quad (11)$$

$$P(z) = \frac{P(z)}{R\tau(z)}; \quad a(z) = \sqrt{kR\tau(z)}.$$

Система дифференциальных уравнений (5), дополненная уравнениями НАА (6)–(11) интегрируется методом Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом времени равным одной секунде ($\Delta t = 1$), начиная с высоты 80 км и заканчивая падением элементов СБЦ [4]. На рис. 2 представлен вид внешней оболочки программного комплекса [10], позволяющего строить траекторию пассивного участка полета элементов СБЦ на основе параболической теории и системы дифференциальных уравнений, а также определять различные параметры и характеристики движения элементов СБЦ.

В программном комплексе реализована оконная внешняя оболочка, предусматривающая введение исходных параметров элементов СБЦ. Программный комплекс позволяет рассчитать дальность и время полета с учетом влияния атмосферы, скорость в точке падения и угол встречи с землей, а также определять другие параметры характеризующие элементы СБЦ.

На рис. 3 представлены графики зависимостей высоты элемента СБЦ от времени, и скорости ($V_{\text{полн}}$) от высоты на атмосферном участке полета.

Таким образом, на основе параболической теории и системы дифференциальных уравнений предложена методика, использующая системы уравнений (4) и (5), позволяющая экстраполировать траекторию полета элементов СБЦ на пас-

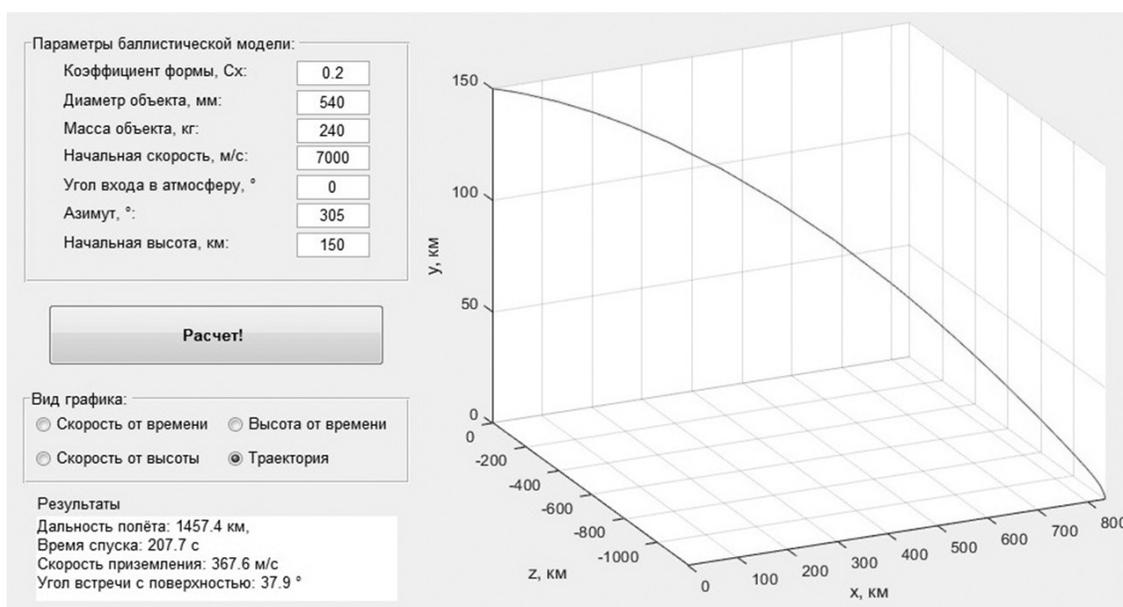


Рис. 2. Иллюстрация вида внешней оболочки программного комплекса

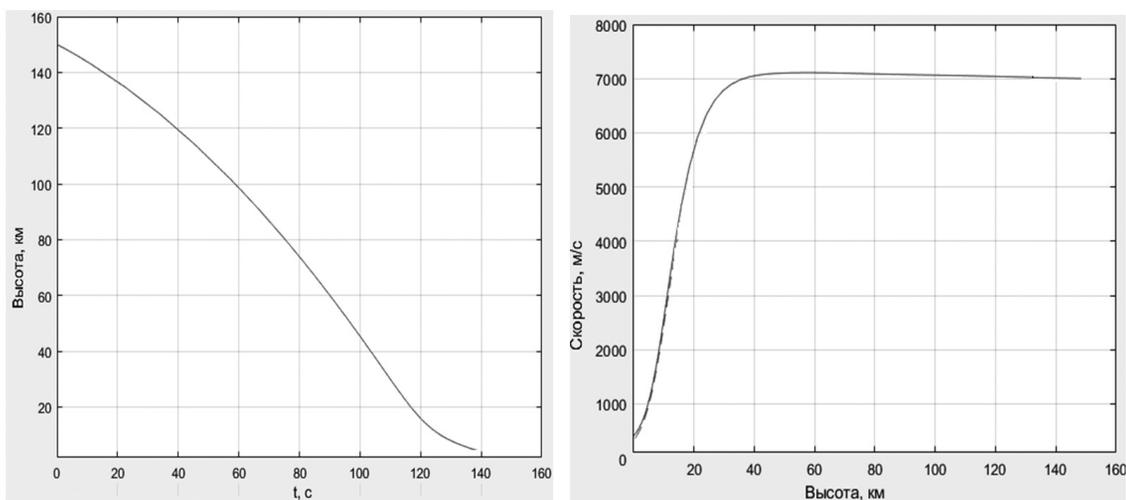


Рис. 3. Графики зависимостей высоты элементов СБЦ БР от времени и скорости ($V_{полн}$) от высоты на атмосферном участке полета

сивном участке траектории. Результаты математического моделирования сопоставимы с данными, приведенными в [11–13], что подтверждает работоспособность предложенной методики.

Литература

1. Средства воздушно-космического нападения и воздушно-космической обороны. Состояние и развитие / под общ. ред. И.Р. Ашурбейли. — М.: Планета, 2017. 336 с.

2. Баллистическая ракета на твёрдом топливе / под общ. ред. А.М. Синюкова. — М.: Воениздат, 1972. 512 с.

3. Дмитриевский А.А., Кошевой В.Н. Основы теории полета ракет. — М.: Воениздат, 1964. 312 с.

4. Ненартович Н.Э., Горевич Б.Н. Системы противоракетной обороны США. Анализ и моделирование. — М.: ПАО «НПО Алмаз», 2018. 320 с.

5. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов [Электронный ресурс] / Ю.Г. Сихарулидзе. 2-е изд. (эл.). — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 407 с.

6. ГОСТ В 24288-80 Снаряды неуправляемые артиллерийские, реактивные, активно-реактивные. Методы расчета траектории полета. — М.: Издательство стандартов, 1980. 55 с.

7. Балаганский И.А. Основы баллистики и аэродинамики: учебное пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. 200 с.

8. Вентцель Д.А. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Вентцель_Дмитрий_Александрович (дата обращения: 09.11.2021).

9. Летестю С. Международные метеорологические таблицы I-II серии / под ред. А.Х. Хргиана. — М.: ВНИИГМИ-МЦД, 1975. 262 с.

10. Программа для реализации методики построения траектории сложной баллистической цели на основе параболической теории и системы дифференциальных уравнений: Свидет. о гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2021666033 / Володин Р.С. — РФ, заявл. 01.10.2021; зарегистр. 06.10.2021.

11. Targeting Flexibility Emphasized by SAC // AviationWeek and Space Technology. 1976. Vol. 104. № 19. P. 29, 31, 33, 34.

12. High-Yield Warhead for Minutemen // Flight International. 1977. Vol. 111. № 3541. 154 p.

13. Richardson D. Could Russia Win in ICBM War? // Flight International. 1978. Vol. 114. № 3624. 797 p.

14. Ашурков И.С., Лешко Н.А., Цыбульник А.Н. Методика расчета рабочей зоны многопозиционной радиолокационной системы с посторонним источником подсвета // Вопросы оборонной техники. Серия 16. Технические средства противодействия терроризму. 2015. № 5–6 (83–84). С. 87–91.

15. Ульянов Г.Н., Павлов И.Н. Локальная система позиционирования объектов вооружения, военной техники и личного состава // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2008. № 1. С. 33–39.

16. Ковалев А.Н., Ковалев Ф.Н. Алгоритм определения координат цели в просветном радиолокаторе с разнесенным приемом // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2014. № 1 (102). С. 28–35.

References

1. Means of aerospace attack and aerospace defense. Condition and development / under total ed. I.R. Ashurbeyli — Moscow: Planeta 2017. 336 p.

2. Solid-fuel ballistic missile / under total. ed. A.M. Sinyukov. — Moscow: Military Publishing, 1972. 512 p.

3. Dmitrievsky A.A., Koshevoy V.N. Fundamentals of the theory of missile flight. — Moscow: Military Publishing, 1964. 312 p.

4. Nenartovich N.E., Gorevich B.N. US missile defense systems. Analysis and modeling. — M.: PJSC NPO Almaz, 2018. 320 p.

5. Sikharulidze Yu.G. Ballistics and guidance of aircraft [Electronic resource] / Yu.G. Sikharulidze. 2nd ed. (email). — M.: BINOM. Knowledge Laboratory, 2013. 407 p.

6. GOST B 24288-80. Unguided artillery, rocket-propelled, active-rocket projectiles. Flight trajectory calculation methods. — Moscow: Standards Publishing House, 1980. 55 p.

7. Balagansky I.A. Fundamentals of ballistics and aerodynamics: textbook. — Novosibirsk: Publishing house of NSTU, 2017. 200 p.

8. Wentzel D.A. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Dimitri_Alexandrovich_Wentzel (date accessed: 09.11.2021).

9. Letestyu C. International meteorological tables I-II series / ed. A.H. Khrgiana. — M.: VNIIGMI-MCD, 1975. 262 p.

10. The program for the implementation of the technique of constructing the trajectory of a complex ballistic target based on the parabolic theory and a system of differential equations: Testimonies. about the state. reg. prog. for computer № 2021666033 / Volodin R.S. — RF, app. 10/01/2021; register 06.10.2021.

11. Targeting Flexibility Emphasized by SAC // AviationWeek and Space Technology. 1976. Vol. 104. № 19. P. 29, 31, 33, 34.

12. High-Yield Warhead for Minutemen // Flight International. 1977. Vol. 111. № 3541. 154 p.

13. Richardson D. Could Russia Win in ICBM War? // Flight International. 1978. Vol. 114. № 3624. 797 p.

14. Ashurkov I.S., Leshko N.A., Tsybulnik A.N. Method of calculation of the working area of a multi-position radar system with an extraneous source of illumination // Voprosy oboronnoi tekhniki. Seriya 16. Tekhnicheskie sredstva protivodestviia terrorizmu. 2015. № 5–6 (83–84). P. 87–91.

15. Ulyanov G.N., Pavlov I.N. Local positioning system of weapons, military equipment and personnel objects // Proceedings of the Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences. 2008. № 1. P. 33–39.

16. Kovalev A.N., Kovalev F.N. Algorithm of determination of target coordinates in a translucent radar with dispersed reception // Proceedings of R.E. Alekseev National State Technical University. 2014. № 1 (102). P. 28–35.